

گروه ریاضی



عنوان :

نام دبیر :

تاریخ : /

98 /

سازمان ملی پرورش
استعدادهای درخشان
دبیرستان دوره اول
فرزانگان 2 منطقه 1
کاربگ شماره :

کلاس :

پایه :

نام و نام خانوادگی :

1 الف) $808 = 2^3 \times 101$ ب) $105000 = 2^3 \times 3 \times 5^4 \times 7$ ج) $1001 = 7 \times 11 \times 13$

د) $51 \times 34 = 2 \times 3 \times 17^2$ ه) $39 \times 91 = 3 \times 7 \times 13^2$ و) $66 \times 121 = 3 \times 11^3$

ز) $234 \times 343 = 2 \times 3^2 \times 7^3 \times 13$ ح) $.78 \times 81 = 2 \times 3^5 \times 13$

2 الف) $.2^2 \times (x) \times 11 = 660 \rightarrow 2^2 \times (x) \times 11 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11 \rightarrow x = 3 \times 5 = 15$

ب) $.3 \times 2^4 \times (x) = 1200 \rightarrow 3 \times 2^4 \times (x) = 2^4 \times 3 \times 5^2 \rightarrow x = 5^2 = 25$

ج) $2^2 \times (x) \times 3 = 1500 \rightarrow 2^2 \times (x) \times 3 = 2^2 \times 3 \times 5^3 \rightarrow x = 5^3 = 125$

د) $2 \times (x) \times 5^2 = 450 \rightarrow 2 \times (x) \times 5^2 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

ه) $2 \times 41 \times (x) = 1394 \rightarrow 2 \times 41 \times (x) = 2 \times 17 \times 41 \rightarrow x = 17$

و) $5 \times 13 \times (x) = 2015 \rightarrow 5 \times 13 \times (x) = 5 \times 13 \times 31 \rightarrow x = 31$

3 الف) $100 \times 7^4 \times 3^5 = 2^2 \times 3^5 \times 5^2 \times 7^4$, $5^7 \times 2^5 \times 18 = 2^6 \times 3^2 \times 5^7$

ب.م.م : $2^2 \times 3^2 \times 5^2$ ک.م.م : $2^6 \times 3^5 \times 5^7 \times 7^4$

ب) $3^5 \times 5^7 \times 7^5$: ک.م.م : 5^3 ب.م.م : $5^3 \times 3^5$, $5^7 \times 7^5$

ج) $14 \times 18 \times 21 = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$, $15 \times 51 \times 72 = 2^3 \times 3^4 \times 5 \times 13$

ب.م.م : $2^2 \times 3^3$ ک.م.م : $2^3 \times 3^4 \times 5 \times 7^2 \times 13$

د) $3^2 \times 7 \times 11$, $2^5 \times 3 \times 7^2$

ب.م.م : 3×7 ک.م.م : $2^5 \times 3^2 \times 7^2 \times 11$

$$91 \times 39 \times 45 = 3^3 \times 5 \times 7 \times 13^2, \quad 65 \times 49 \times 75 = 3 \times 5^3 \times 7^2 \times 13 \quad (ه)$$

$$3 \times 5 \times 7 \times 13 : \text{م.م.ک} \quad .3^3 \times 5^3 \times 7^2 \times 13^2$$

$$35 \times 77 = 5 \times 7^2 \times 11, \quad 12 \times 18 = 2^3 \times 3^3 \quad (و)$$

$$.2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7^2 \times 11 : \text{م.م.ک} \quad 1. \text{ م.م.ک}$$

$$2^2 \times 3^6 \times 5^4 < 2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 4 \times 11 < 2^4 \times 3^7 \times 5^3 \quad (الف)$$

برای مقایسه بهتر، م.م.م این سه عدد را پیدا کرده و هر سه را بر آن تقسیم می‌کنیم. مثل قبل که می‌خواستیم م.م.م دو عدد را بدست آوریم، ابتدا باید هر سه به صورت تجزیه به عوامل اول باشند. دومی و سومی درست‌اند. اما در اولی هم 4 داریم و هم 2^3 . که با هم به صورت 2^5 در می‌آید. پس سه عدد به ترتیبی که در صورت سوال آمده به صورت زیر هستند:

$$2^5 \times 3^5 \times 5^2 \times 11, \quad 2^4 \times 3^7 \times 5^3, \quad 2^2 \times 3^6 \times 5^4$$

توان‌های هر پایه را بین هر سه عدد چک می‌کنیم هر کدام کمتر بود انتخاب می‌کنیم:

$$2^2 \times 3^5 \times 5^2$$

حالا همه را بر آن تقسیم می‌کنیم:

$$2^3 \times 11 = 88, \quad 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180, \quad 3 \times 5^2 = 75$$

حالا ترتیب به صورت $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180 < 2^3 \times 11 = 88 < 3 \times 5^2 = 75$ در می‌آید که با ضرب م.م.م و درواقع بازگرداندن آن به عدد به ترتیبی که گفتیم می‌رسیم.

$$.2^6 \times 3^2 \times 5^5 < 2^2 \times 3^7 \times 5^4 \quad (ب)$$

مشابه الف م.م.م را حساب می‌کنیم و دو عدد را به آن تقسیم می‌کنیم. م.م.م این دو عدد برابر با $2^2 \times 3^2 \times 5^4$ است. دو عدد را بر آن تقسیم می‌کنیم. دو عدد $2^4 \times 5 = 80 < 243 = 3^5$ درست می‌شوند.

$$.2^3 \times 3 \times 5^4 \times 13^8 < 2^6 \times 5^5 \times 13^7 \quad (ج)$$

در اینجا هم م.م.م. را بدست می‌آوریم که برابر با $2^3 \times 5^4 \times 13^7$ است. حاصل تقسیم دو عدد برابر با $3 \times 13 = 39 < 40 = 2^3 \times 5$ می‌شود.

$$.13^{21} \times \left(\frac{1}{13}\right)^4 < 13^{18} < 13^{21} \times \left(\frac{2}{13}\right)^4 \text{ (د)}$$

در اینجا عددها را ساده می‌کنیم.

$$13^{21} \times \left(\frac{1}{13}\right)^4 = 13^{17} \times 13^4 \times \left(\frac{1}{13}\right)^4 = 13^{17} \times \left(13 \times \frac{1}{13}\right)^4 = 13^{17} \times 1^4 = 13^{17},$$

$$13^{21} \times \left(\frac{2}{13}\right)^4 = 13^{17} \times 13^4 \times \left(\frac{2}{13}\right)^4 = 13^{17} \times \left(13 \times \frac{2}{13}\right)^4 = 13^{17} \times 2^4.$$

حالا مسئله تبدیل می‌شود به مقایسه سه عدد 13^{18} , 13^{17} , $13^{17} \times 2^4$ که بسیار راحت‌تر است.
ب.م.م این اعداد برابر با 13^{17} است. با تقسیم تبدیل به $13, 1, 2^4 = 16$ می‌شود. که حالا مقایسه بسیار راحت است.

$$(5) \text{ الف) } 5^{696} = \text{عرض} , 5^{697} = \text{طول}$$

$$\text{ب) } \text{عرض} \times 8 = \text{عرض} \times (4 \times 2) = 2(\text{عرض} + \text{عرض} \times 3) = 2(\text{طول} + \text{عرض}) = \text{محیط}$$

(6) در اسلاید جواب داده شد.

(7) در پاسخبرگ قبلی گفتیم.

(8) الف) کل اعداد 2 تا 18 را به صورت تجزیه شده می‌نویسیم.

$$2 = 2, 3 = 3, 4 = 2^2, 5 = 5, 6 = 2 \times 3, 7 = 7, 8 = 2^3, 9 = 3^2, 10 = 2 \times 5, 11 = 11, 12 = 2^2 \times 3$$

$$13 = 13, 14 = 2 \times 7, 15 = 3 \times 5, 16 = 2^4, 17 = 17, 18 = 2 \times 3^2$$

حالا همه را در هم ضرب می‌کنیم.

$$A = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5 \times 11 \times 2^2 \times 3 \times 13 \times 2 \times 7 \times 3 \times 5 \times 2^4 \times 17 \times 2 \times 3^2$$

حالا توانهای با پایه مشابه را با هم جمع می‌زنیم و به جواب می‌رسیم.

$$A = 2^{1+2+1+3+1+2+4+2} \times 3^{1+1+2+1+1+2} \times 5^{1+1+1} \times 7^{1+1} \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 = 2^{16} \times 3^8 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17$$

ب) تمامی اعداد را ابتدا تجزیه می‌کنیم.

$$128 = 2^7, 49 \times 28 = 7^2 \times 2^2 \times 7 = 2^2 \times 7^3, 221 = 13 \times 17, 10000 = 2^4 \times 5^4, 290 = 2 \times 5 \times 29,$$

$$320 \times 230 = 2^6 \times 5 \times 2 \times 5 \times 23 = 2^7 \times 5^2 \times 23, 128 \times 128 = 2^7 \times 2^7 = 2^{14}, 51 \times 91 = 3 \times 17 \times 7 \times 13$$

عددی می‌تواند شمارنده باشد که توان تمام پایه‌ها در تجزیه آن از توان همان پایه در تجزیه A کمتر یا مساوی باشد. فقط چهار عدد $128, 221, 128 \times 128, 51 \times 91$ شرایط را دارند. (ج) شمارنده‌های A از اول تا هجدهم، همان اعداد 1 تا 18 هستند. نوزدهمین اولین عدد بعد از 18 است که شمارنده A باشد. 19 نیست. اما 20 هست. زیرا $20 = 2^2 \times 5$ پس 20 جواب است. (د) فرض کنید مثل مسئله 7 شمارنده‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم. توجه کنید که 23 امین شمارنده از آخر را اگر در 23 امین شمارنده از اول ضرب کنیم به A می‌رسیم. پس راحت‌تر است که 23 امین شمارنده از اول را پیدا کنیم و بعد A را به آن تقسیم کنیم ترتیب 23 تای اول چنین است.

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,20,21,22,24,25

تا 20 را در قسمت قبلی بدست آوردیم. اما برای بقیه:

$$21 = 3 \times 7, \quad 22 = 2 \times 11, \quad 24 = 2^3 \times 3, \quad 25 = 5^2$$

به تجزیه و پایه‌ها و توان‌ها دقت کنید.

حالا A را بر $25 = 5^2$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{A}{25} = \frac{2^{16} \times 3^8 \times 5^3 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17}{5^2} = 2^{16} \times 3^8 \times 5 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17$$

(9) $xy = 1000 = 2^3 \times 5^3$. x و y هر دو شمارنده 1000 هستند پس

$$x = 2^a \times 5^b, \quad y = 2^c \times 5^d$$

است که a, b, c, d هر کدام حداقل 0 و حداکثر 3 هستند. پس

$$2^3 \times 5^3 = xy = 2^a \times 5^b \times 2^c \times 5^d = 2^{a+c} \times 5^{b+d} \rightarrow a+c = b+d = 3$$

حالا اگر a و b هر دو حداقل 1 باشند، $10 = 2 \times 5$ شمارنده x است. پس اگر 10 شمارنده

هیچ‌کدام از x و y نباشد، یکی از a و b و یکی از c و d بایستی صفر باشد. پس:

$$x = 125, y = 8 \quad \text{یا} \quad x = 8, y = 125 \quad \text{که داریم} \quad a = d = 3, b = c = 0 \quad \text{یا} \quad a = d = 0, b = c = 3$$

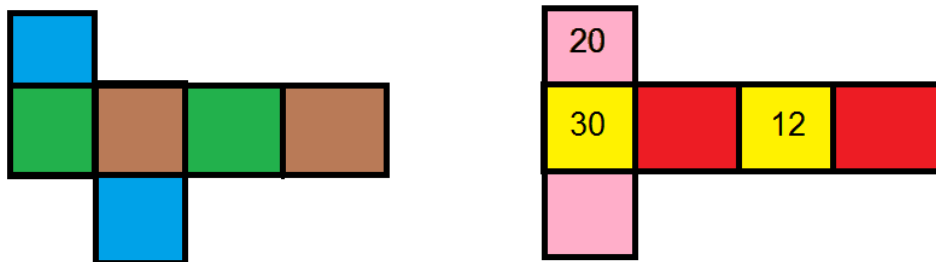
(ب) جواب‌های متعددی داریم یک نمونه:

$$4 \quad 25 \quad 100$$

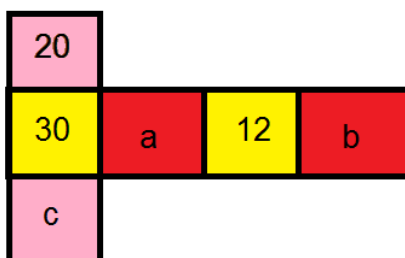
$$2 \quad 125 \quad 40$$

$$1 \quad 10 \quad 1000$$

(9) وجه‌های روبرو هم‌رنگ هستند.



(الف) به شکل زیر دقت کنید.



$$\text{داریم: } a \times b = 20 \times c = 30 \times 12 = 2 \times 3 \times 5 \times 2^2 \times 3 = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$$

$$c = \frac{30 \times 12}{20} = 18 = 2 \times 3^2$$

بدست آوردن c راحت بود اما حالا باید a و b را طوری بیابیم که تکراری و بیش از 40

نباشند. شمارنده‌های 360 را از کوچک به بزرگ می‌نویسیم.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360

دقت کنید که حاصلضرب هر دو عدد قرینه نسبت به وسط برابر با 360 است. ببینید:

$$360 \times 1 = 180 \times 2 = 120 \times 3 = \dots = 20 \times 18 = 360$$

حالا اون دو عددی که لازم داریم بخش قرمز را با آن پر کنیم، باید از این جفت‌های قرینه باشند و از 40 هم بیشتر نشوند. اگر یکی از این دو خیلی کوچک باشد دیگری خیلی بزرگ می‌شود. پس به جفت‌های وسط تر بیشتر نگاه می‌کنیم.

$$18 \times 20 = 15 \times 24 = 12 \times 30 = 10 \times 36 = 9 \times 40$$

چون قرار است تکرار نباشد، سه نوع جواب مختلف داریم. 15 و 24 یا 10 و 36 یا 9 و 40.

(ب) بله؛ آبی: 2 و 18. سبز: 3 و 12. قهوه‌ای: 4 و 9.

توجه کنید که جواب یکتا نیست.

(11 الف) تعداد شمارنده‌های هر کدام را می‌شماریم. اگر بیش از سه تا شد متوقف می‌شویم و سراغ بعدی می‌رویم.

$$6: 1, 2, 3, 6. \quad 49: 1, 7, 49. \quad 81: 1, 3, 9, 27, \dots \quad 169: 1, 13, 169. \quad 512: 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$36: 1, 2, 3, 4, \dots \quad 121: 1, 11, 121. \quad 14^2 = 1, 2, 7, 14, \dots$$

اگر دقت کنید متوجه می‌شوید که 49 و 169 و 121 عدد دوم هستند.

(ب) تنها 100 این ویژگی را دارد. حاصلضرب 25 و 4 است و هر کدام از این دو عدد سه شمارنده دارند.

$$25: 1, 5, 25 \quad 4: 1, 2, 4$$

(ج) بله اگر به صورت p^2 که p عدد اول است باشد، تنها شمارنده‌های آن 1 و p و p^2 است.

$$(12) \text{ الف) } (-1)^n \text{ ب) } n^2(-1)^{n+1} \text{ ج) } n^2 + (-1)^n$$

(13) طبق مسئله در ثانیه 60ام کل ظرف پر می‌شود. هر ثانیه که می‌گذرد باکتریها تعدادشان دوبرابر می‌شود. پس در ثانیه 59ام تعداد باکتریهای موجود نصف تعداد آنها در ثانیه 60ام است. پس درست نصف ظرف در ثانیه 59ام پر شده است.